

# Treballs destacats de matemàtiques

## Resum de tesis doctorals de les universitats catalanes

ASHUTOSH BIJALWAN

Tesi doctoral: *Optimització numèrica de locomoció de cosos elàstics en substractes friccional*s, dirigida per José J. Muñoz Romero, llegida el dia 18 de juliol del 2024, en el programa de doctorat en Matemàtica Aplicada de la Universitat Politècnica de Catalunya. (j.munoz@upc.edu)



La teoria de control òptim ofereix un marc per determinar entrades òptimes en sistemes modelats com un sistema de valor inicial. Aquesta tesi se centra en el desenvolupament de tècniques de discretització que preserven l'estructura per problemes de control òptim amb aplicacions a sistemes mecànics i la locomoció d'organismes sense extremitats.

Es proposen mètodes d'integració que preserven el Hamiltonià del control, que és una integral de les equacions d'Euler-Lagrange del problema de control òptim (PCO). A més, s'introdueix una tècnica que és capaç de preservar també el moment angular resultant de la simetria rotacional del PCO.

També s'estudia l'estabilitat numèrica de la solució quan es discretitza en el temps. Es demostra que aquesta estabilitat i la presència d'oscil·lacions numèriques depenen no només del pas de temps, sinó també de paràmetres del funcional objectiu, que mesura la quantitat de control. S'il·lustra també amb un problema que aquests resultats també són aplicables a PCO no lineals.

La solució numèrica del PCO discretitzat es resol amb dues estratègies: monolítica i esglaonada. El primer resol totes les condicions d'optimalitat per tots els passos de temps en

un únic sistema no lineal d'equacions, i es basa en un esquema Newton-Raphson que garanteix la convergència quadràtica en un entorn de la trajectòria òptima. L'estratègia esglaonada es basa en el Forward-Backward Sweep Method (FBSM), on les equacions d'estat i adjuntes es resolen de forma separada, i les equacions de control permeten una actualització de les variables de control. Addicionalment, es dissenya una estratègia híbrida que combina els avantatges d'ambdós mètodes.

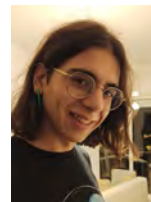
La tesi també inclou un marc general pel modelat de la locomoció d'organismes sense extremitats en substrats friccional utilitzant models 2D i 3D amb mètodes d'Elements Finites.

Pel model continu 2D, l'activitat muscular se simula amb tensions actives, mentre que en el model 3D s'hi incorpora una descomposició multiplicativa del gradient de deformació, que permet mimetitzar un rang ampli de patrons de locomoció en 3D per sòlids elàstics.

Les equacions de govern en derivades parcials es transformen en equacions diferencials algebraïques (DAEs), que un cop discretitzades formen un problema de programació no lineal que es resol eficientment amb FBSM.

CLARA TORRES LATORRE

Tesi doctoral: *Teoria de regularitat per a problemes de l'obstacle i desigualtats de Harnack de frontera*, dirigida per Xavier Ros Oton, llegida el dia 21 de juny del 2024, en el programa de doctorat en Matemàtiques de la Universitat de Barcelona.



Aquesta tesi se centra en l'estudi d'Equacions en Derivades Parcial (EDP) el·líptiques i parabòliques, tant locals com no locals, concretament en les propietats de regularitat d'alguns problemes d'obstacle.

Els problemes d'obstacle són exemples de problemes de frontera lliure, és a dir, problemes d'EDP on les incògnites són una funció i una partició del domini en diferents regions, i l'EDP satisfeta en cada regió és diferent. Els problemes de frontera lliure són un camp de recerca molt actiu, tant per les seves aplicacions al món real, com pels reptes matemàtics que suposen.

Aquesta tesi està dividida en dues parts. La Part I està dedicada a l'estudi de diversos problemes d'obstacle.

Al Capítol 1, estudiem el problema de l'obstacle per a operadors parabòlics no locals, en el règim supercrític  $s < 1/2$ . Establim la regularitat  $C^{1,1}$  òptima de les solucions i demostrarem que la frontera lliure és globalment  $C^{1,\alpha}$ .

El Capítol 2 està dedicat a les propietats de regularitat genèriques de la frontera lliure en el problema de l'obstacle prim. En particular,

veiem que a  $\mathbb{R}^3$  i  $\mathbb{R}^4$ , la frontera lliure és diferenciable gairebé per tota solució.

Concloem la Part I amb el Capítol 3, on utilitzem un anàleg no local de la tècnica de Bernstein per, entre altres aplicacions, estendre la teoria de regularitat coneguda per a problemes d'obstacle no locals a problemes en dominis fitats.

A la Part II, estenem la desigualtat de Harnack de frontera a equacions (locals) el·líptiques i parabòliques amb un terme independent.

La desigualtat de Harnack de frontera diu que si  $u$  i  $v$  són funcions harmòniques positives que s'anul·len en part de la frontera d'un domini prou regular, llavors  $u/v$  està fitada i és  $C^\alpha$  fins a la vora.

Al nostre treball, desenvolupem desigualtats de Harnack de frontera per a equacions en forma de no-divergència amb terme independent. Com a conseqüència, obtenim la regularitat  $C^{1,\alpha}$  de la frontera lliure a alguns problemes d'obstacle completament no-lineals.

El Capítol 4 tracta sobre equacions el·líptiques i el Capítol 5 parla d'equacions parabòliques.

JOAQUIM BRUGUÉS MORA

Tesi doctoral: *Homologia de Floer per varietats  $b$ -simplèctiques*, dirigida per Sonja Hohloch i Eva Miranda, llegida el dia 20 de març del 2024, en el programa de doctorat en Matemàtica Aplicada de la Universitat Politècnica de Catalunya.



En aquesta tesi investiguem diversos aspectes dinàmics dels camps vectorials Hamiltonians en varietats simplèctiques singulars. Ens centrem en dues facetes: primer investiguem una generalització de la conjectura d'Arnold en el context de la geometria simplèctica singular, i en segon lloc hi examinem sistemes integrables, i particularment semitòrics.

Comencem per una introducció en geometria simplèctica, posant èmfasi en la conjectura d'Arnold. Aquesta conjectura proposa l'exis-

tència d'una fita inferior en el nombre d'òrbites 1-periòdiques en sistemes Hamiltonians no degenerats en termes estrictament topològics. També presentem una construcció emprada especialment per investigar aquesta conjectura: la teoria de Floer. Dins el context de la geometria simplèctica també s'ofereix un resum de la teoria de sistemes integrables i l'estudi dels seus punts singulars.

Tot seguit explorem l'objecte d'interès d'aquesta tesi: les varietats  $b^m$ -simplèctiques. Aquestes

varietats tenen una estructura que és simplèctica gairebé arreu però que presenta una singularitat en una hipersuperfície.

Seguidament, investiguem el comportament dinàmic d'uns camps vectorials d'interès en geometria  $b^m$ -simplèctica, induïts per  $b^m$ -Hamiltonians. Estudiem la seva dinàmica en un entorn de la hipersuperfície singular, i trobem una família de  $b^m$ -Hamiltonians per a la qual es pot formular la conjectura d'Arnold.

Després explorem descrivim algunes tècniques que ens permeten connectar la dinàmica dels camps  $b^m$ -Hamiltonians amb la dinàmica que trobem en la geometria simplèctica clàssica.

GUILLE CARRIÓN SANTIAGO

Tesi doctoral: *Límits superiors via Àlgebra homotòpica*, dirigida per Natàlia Castellana Vila i Antonio Díaz Ramos, llegida el dia 29 de juny del 2023, en el programa de doctorat en Matemàtiques de la Universitat Autònoma de Barcelona. (guille.carrions@urjc.es)



Aquesta tesi doctoral investiga els límits superiors de functors mitjançant l'ús d'eines homotòpiques, oferint una alternativa als enfocaments tradicionals d'àlgebra homològica. Concretament, se centra en functors definits sobre una categoria filtrada en la qual tot endomorfisme és un isomorfisme (coneguda com a categoria EI) i que prenen valors en mòduls.

S'hi estableixen dues estructures de categories de models en aquesta categoria de functors: una per a functors contravariants i una altra per a functors covariants. Aquesta divisió permet abordar de manera específica els límits i col·límits superiors, descrivint-los respectivament amb reemplaçaments fibrants i cofibrants. La construcció d'aquests reemplaçaments es realitza a partir de les propietats combinatòries de la categoria d'índex, i inclou variacions adaptades a l'anàlisi de cotes i rangs d'anul·lació dels límits superiors, un aspecte clau per a la descripció homològica dels functors en qüestió.

Per a categories parcialment ordenades (posets), s'introdueix una noció de functor de Mackey adaptada a aquest context, inspirada en la noció clàssica de functor de Mackey per a categories d'òrbites. S'estableix que els functors de Mackey, quan tenen una noció addicional de

Per acabar, donem dos resultats que demostren versions parcials de la conjectura d'Arnold per a camps  $b^m$ -Hamiltonians.

També demostrem l'existència d'una homologia de Floer per a varietats  $b^m$ -simplèctiques. Per aconseguir-ho estudiem l'equació de Floer en el context dels  $b^m$ -Hamiltonians presentats anteriorment.

Finalment, introduïm les nocions de classe  $b$ -integrable i de sistema  $b$ -semitòric. Estudiem les característiques dels sistemes  $b$ -semitòrics a través d'alguns exemples i les propietats dels seus punts singulars.

quasi-unitat, són cofibrants, amb la qual cosa els seus col·límits superiors en graus positius s'anul·len, una propietat que simplifica el càlcul homotòpic.

La combinació de l'estructura dels reemplaçaments i les eines de càlcul proposades permet derivar cotes explícites a partir de les quals els límits superiors d'un functor s'anul·len. Aquestes cotes es descriuen mitjançant diverses estratègies, que inclouen la geometria del poset, cotes locals dels límits superiors i filtracions basades en functors atòmics.

Finalment, s'estudia en detall el cas dels límits superiors de functors indexats en posets CL-shellable. Aquests posets tenen el tipus d'homotopia d'una unió puntual d'esferes de la mateixa dimensió, de manera que els límits superiors en graus estrictament positius d'un functor constant estan concentrats en un sol grau. Motivats per aquest cas particular, s'abstrau una propietat suficient per a un functor que garanteix que els seus límits superiors s'anul·len per a dimensions inferiors a la longitud del poset. Com a exemple d'aplicació, es descriu el cas de la família de functors de  $n$ -formes lineals en feixos d'hiperplans vectorials.